向量空间与维数

林胤榜

主要内容

线性 (向量) 空间

回顾:

定义 (线性空间)

假设 V 是集合配上两个运算 $+$ 和 $\cdot$,

$$
\begin{aligned}
(\text{加法})\ +&: V \times V \to V, \\
(\text{数乘})\ \cdot&: \mathbb{R} \times V \to V,
\end{aligned}
$$

使得以下条件成立: $\forall \mu, \nu, \omega \in V$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

线性 (向量) 空间

回顾:

定义 (线性空间)

假设 V 是集合配上两个运算 $+$ 和 $\cdot$,

$$(加法)\ +\colon V \times V \to V,$$
$$(数乘)\ \cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V,$$

使得以下条件成立: $\forall \mu, \nu, \omega \in V$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

例子

$\mathbb{R}^n$, $M_{m\times n}$, $\mathbb{R}$ 上的连续/可导/可积函数.

线性空间的一些基本性质

设 V 为线性空间.

性质. 0 向量唯一.

线性空间的一些基本性质

设 V 为线性空间.

性质. 0 向量唯一.

线性空间的一些基本性质

设 V 为线性空间.

性质. 0 向量唯一.

证明.

若有两个零向量 0_1 和 0_2, 则 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. □

性质. 每一个向量的负向量唯一. α 的负向量记为 $-\alpha$.

线性空间的一些基本性质

设 V 为线性空间.
性质. 0 向量唯一.

证明.

若有两个零向量 0_1 和 0_2, 则 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. □

性质. 每一个向量的负向量唯一. α 的负向量记为 $-\alpha$.

证明.

若 α 有两个负向量, 记为 β_1 和 β_2, 则 $\alpha + \beta_1 = 0$.
两边加上 β_2, 得 $\beta_2 = 0 + \beta_2 = (\beta_2 + \alpha) + \beta_1 = 0 + \beta_1 = \beta_1$. □

性质. $0 \cdot \alpha = 0, (-1) \cdot \alpha = -\alpha, \lambda \cdot 0 = 0, \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in V.$

性质. $0 \cdot \alpha = 0, (-1) \cdot \alpha = -\alpha, \lambda \cdot 0 = 0, \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in V$.

证明.

$0 \cdot \alpha + \alpha = (0+1)\alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha \Rightarrow 0 \cdot \alpha + \alpha - \alpha = \alpha - \alpha = 0.$
两边加上 α 的负向量,
$(-1) \cdot \alpha + \alpha = (-1+1)\alpha = 0 \cdot \alpha = 0 \Rightarrow (-1) \cdot \alpha = -\alpha.$
$\lambda \cdot 0 + \lambda v = \lambda(0 + v)\lambda v \Rightarrow \lambda \cdot 0 = 0.$ □

性质. 若 $\lambda\alpha = 0, \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in V$, 则 $\lambda = 0$ 或 $\alpha = 0$.

性质. $0\cdot\alpha=0,(-1)\cdot\alpha=-\alpha,\lambda\cdot 0=0,\lambda\in\mathbb{R},\alpha\in V.$

证明.

$0\cdot\alpha+\alpha=(0+1)\alpha=1\cdot\alpha=\alpha\Rightarrow 0\cdot\alpha+\alpha-\alpha=\alpha-\alpha=0.$
两边加上 α 的负向量,
$(-1)\cdot\alpha+\alpha=(-1+1)\alpha=0\cdot\alpha=0\Rightarrow(-1)\cdot\alpha=-\alpha.$
$\lambda\cdot 0+\lambda v=\lambda(0+v)\lambda v\Rightarrow\lambda\cdot 0=0.$ □

性质. 若 $\lambda\alpha=0,\lambda\in\mathbb{R},\alpha\in V$, 则 $\lambda=0$ 或 $\alpha=0.$

证明.

若 $\lambda\neq 0$, 则 $\alpha=1\cdot\alpha=(\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda)\alpha=\frac{1}{\lambda}\cdot 0=0.$ □

生成

定义

假设 $a_1, \cdots, a_m$ 是线性空间 V 中的元素. 记 $a_1, \cdots, a_m$ 的线性组合的集合为

$$\mathrm{span}(a_1, \cdots, a_m) = \{k_1 a_1 + \cdots + k_m a_m \mid k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{R}\} \subset V.$$

令 $L = \mathrm{span}(a_1, \cdots, a_m)$. 注意到, L 在加法和数乘下封闭:

i $(k_1 a_1 + \cdots + k_m a_m) + (\ell_1 a_1 + \cdots + \ell_m a_m) = (k_1 + \ell_1) a_1 + \cdots + (k_m + \ell_m) a_m \in L$;

ii $\ell(k_1 a_1 + \cdots + k_m a_m) = (\ell k_1) a_1 + \cdots + (\ell k_m) a_m \in L$.

容易看出 $(L, +, \cdot)$ 构成一个线性空间. 它是 V 的一个线性子空间.

线性子空间

有以下一般的定义:

定义 (P145 定义 2)

给定非空子集 $L \subset V$, 若 $(L, +, \cdot)$ 构成线性空间, 则 L 是 V 的一个线性子空间, 记作 $L \le V$.

定理

上述 $\mathrm{span}(a_1, \cdots, a_m)$ 是 V 的线性子空间.

命题

子空间必包含 0 向量.

假设 $L \le V$. 若 $v \in L$, 则 $0 = 0 \cdot v \in L$ (数乘下封闭).

子空间的 (非) 例子

例子

1. $\{0\}$ 和 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 所有的线性子空间.
2. $\mathbb{R}^2$ 中所有过原点的直线.
3. $\mathbb{R}^3$ 中所有过原点的直线和平面.

子空间的 (非) 例子

例子

1. $\{0\}$ 和 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 所有的线性子空间.
2. $\mathbb{R}^2$ 中所有过原点的直线.
3. $\mathbb{R}^3$ 中所有过原点的直线和平面.

例子 (非例子)

$\mathbb{R}^2$ 中不过原点的直线不是线性子空间.

子空间的 (非) 例子

例子

1. $\{0\}$ 和 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 所有的线性子空间.
2. $\mathbb{R}^2$ 中所有过原点的直线.
3. $\mathbb{R}^3$ 中所有过原点的直线和平面.

例子 (非例子)

$\mathbb{R}^2$ 中不过原点的直线不是线性子空间.

例子 (齐次线性方程组的解集)

$\{ X \mid AX = 0 \}$

基

设 V 为线性空间. 希望在 V 中找到一组向量使得

1. 它们线性无关;
2. 它们的线性组合可以表示所有向量.

(条件 1 表示没有冗余, 条件 2 表示足够.)

定义

若一组向量 $S = \{v_\alpha\}_\alpha \subset V$(不一定有限) 满足以上两个条件, 则称 S 为 V 的一组基.

观察.

> $S \subset V$ 是 V 的一组基当且仅当 S 是 V 的极大线性无关组.

维数, 坐标

定义

假设 $S \subset V$ 是基. 若 S 是有限集, 则 S 的元素个数 n 称为 S 的维数, 记为 $\dim V = n$.

假设 $S = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset V$ 一组基, $w \in V$, 则 w 可由 S 线性表示，且表达式唯一，记为

$$w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

向量 $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 称为 w 在基 S 下的坐标.

基变换

假设 $A = (a_1, \cdots, a_n)$ 是 n 维向量空间 V 的一组基, $B = (b_1, \cdots, b_n)$ 是另外一组基, 使得

$$\begin{aligned} b_1 &= p_{11}a_1 + p_{21}a_2 + \cdots + p_{n1}a_n, \\ b_2 &= p_{12}a_1 + p_{22}a_2 + \cdots + p_{n2}a_n, \\ &\vdots \\ b_n &= p_{1n}a_1 + p_{2n}a_2 + \cdots + p_{nn}a_n. \end{aligned}$$

那么

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

可逆.

有

$$B=(b_1,\cdots,b_n)=(a_1,\cdots,a_n)P=AP,$$

称为基变换公式. 矩阵 P 称为从基 $A=(a_1,\cdots,a_n)$ 到 $B=(b_1,\cdots,b_n)$ 的过渡矩阵.

坐标变换

给定向量 $v \in V$, 记 v 在基 A 下的坐标为 $x \in \mathbb{R}^n$, 在 B 下的坐标为 $y \in \mathbb{R}^n$, 则

$$Ax = v = By.$$

又因为 $B = AP$, 可以推得

$$y = P^{-1}x,$$

称为坐标变换公式.

假设 $\varphi\colon V \to W$ 是线性映射, 亦即对任意 $v_1, v_2 \in V$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$;
2. $\varphi(\lambda v_1) = \lambda\varphi(v_1)$.

定义

若 φ 也是双射, 则称 φ 为线性同构, V 与 W 线性同构, 并记 $V \cong W$.

假设 $\varphi\colon V \to W$ 是线性映射, 亦即对任意 $v_1, v_2 \in V$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$;
2. $\varphi(\lambda v_1) = \lambda\varphi(v_1)$.

定义

若 φ 也是双射, 则称 φ 为线性同构, V 与 W 线性同构, 并记 $V \cong W$.

定理

给出 n 维向量空间 V 的一组基 $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$, 等同于给出一个线性同构

$$\varphi\colon V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n,$$

$$w = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \mapsto (a_1, \cdots, a_n)$$

解释.

- 给定一组基 $S=\{v_1,\cdots,v_n\}\subset V$ 基, 如上定义 $\varphi:V\to\mathbb{R}^n$, 可以证明它是线性同构;
- 给定一个线性同构 $\varphi:V\to\mathbb{R}^n$, 记 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$(第 i 个坐标为 1, 其余为 0) 的原像为 v_i, 即 $\varphi(v_i)=e_i$. 则 $\{v_i\}_{i=1}^n$ 是 v 的一组基.

定义

称 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基.